846 Haar measure 存在ノ証明ニ就テ
（河田氏ノ手紙ヨリ）

河田　敬義（東大）

Markoff Process ヲ用ヒテ Haar ノ Measure ヲ求メルトイフ問題ハ一般ノ locally compact group デハ、トテモ出來サウモアリマセンガ、compact group ノトキ，從ツテ同様ニ almost periodic function ノ mean ノ value ノ存在ノ場合ニハ以前ニ彌永先生ト小平君トカラ聞イタコトノアル証明法ヲ若干変形シタダケデ得ラレルヤウニ思ヒマスノデ、以下ニ述ベサセテ頂キタイト思ヒマス。

『群 G ノ上ノ almost periodic function $f(x)$ ガ與ヘラレルト定義カラ

$$\rho(x,y) = \sup_{a,b \in G} |f(axb) - f(ayb)|$$

デ G ニ一般ノ metric ヲ入レルト totally bounded ニナリマスカラ $\varepsilon_n \to 0$ ナル正数列ヲ取リ、ε_n ニ對シテ $G = E_1^{(n)} + \cdots + E_{r_n}^{(n)}$ ト直徑ガ ε_n 以下ノ有限箇ノ disjoint sets ニ分ケルコトガ出來マス。$E_i^{(n)}$ カラ任意ニ一点 $p_i^{(n)}$ ヲトリ（$n=1, 2, \cdots$; $i=1, \cdots, r_n$）．其等ヲ列ベテ $p_1, p_2 \cdots$ トシ，p_r ニ $\frac{1}{2^r}$ ナル probability ヲ分布スルコトニヨツテ G ノ上ニ completely additive ナ probability distribution $P(E)$ ヲ

作リマス。

此レカラ単位時間ニ於ケル遷移確率 $P(x, E) = P(x^{-1}E)$ ナル Markoff Process ヲ考ヘマス。

$$P^{(n)}(x, E) = \int_G P^{(n-1)}(x, dy) P(y, E), \quad (P^{(1)}(x, E) = P(x, E)).$$

$f^{(n)}(x) = \int_G P^{(n)}(x, dy) f(y)$ トスレバ

(1) $f^{(n)}(x) \longrightarrow \underset{x}{M} f(x) = const.$ (uniformly)

が証明出来マス。(但シ $f(x)$ ハ real function トシテ置キマス)。

其レニハ $M_n = \overline{fin}\ f^{(n)}(x)$, $m_n = \underline{fin}\ f(x)$.

$$O_n = M_n - m_n \ (n = 0, 1, \cdots\cdots, f^{(0)}(x) = f(x))$$

ト置ケバ

$$M_n \geqq M_{n+1} \geqq m_{n+1} \geqq m_n, \quad O_n \geqq O_{n+1} \geqq \cdots\cdots$$

カラ $O_n \rightarrow 0$ ヲ証明スレバヨイ事ニナリマス。

今與ヘラレタ ε ニ對シテ ヨ $\varepsilon_n < \varepsilon = \varepsilon_n$ ヲ取リ與ヘラレダ x, y ニ對シテ $xE_1^{(n)}$ ヘ $yE_s^{(n)} \neq 0$ ナル S ヲ一ツ取リマス(以下 $E_1^{(n)}\cdots\cdots$ ノ (n) ヲ省キマス)。$P(E)$ ノ定義カラ $P(E_i) > \mu > 0$ $(i = 1, \cdots\cdots, n_r)$ ナル μ が存在シマスカラ

$$f^{(l)}(x) - f^{(l)}(y) = \int_G f^{(l-1)}(xt) P(dt) - \int_G f^{(l-1)}(yt) P(dt)$$

$$= \int_{E_1} f^{(l-1)}(xt) P(dt) + \int_{G-E_1} f^{(l-1)}(xt) P(dt)$$

$$-\int_{E_s} f^{(l-1)}(yt)\,P(dt)-\int_{G-E_s} f^{(l-1)}(yt)\,P(dt)$$

$$\leqq P(E_1)\cdot\overline{\underset{t\in xE_1}{fin}}\, f^{(l-1)}(t)+P(G-E_1)\cdot M_{l-1}$$

$$-P(E_s)\,\underline{\underset{t\in yE}{fin}}\, f^{(l-1)}(t)-P(G-E_r)\cdot m_{l-1}$$

$$\leqq\Big(\overline{\underset{t\in xE_1}{fin}}\, f^{(l-1)}(t)-\underline{\underset{t\in yE_s}{fin}}\, f^{(l-1)}(t)\Big)\mu+(1-\mu)\,O_{l-1}$$

然ルニ xE_1+yE_s ニ於ケル $f^{(l-1)}(t)$ ノ Oscilation

ハ $f^{(l-1)}(t)$ ノ定義，E_i ノ定義カラ

$xE_1\cap yE_s\neq 0$ ヨリ $2\varepsilon_n$ ヲ超エナイ。故ニ x, y ハ

任意デアルカラ

$$O_l\leqq 2\varepsilon_n\mu+(1-\mu)\,O_{l-1}$$

之レカラ

$$O_l\leqq 2\varepsilon_n\mu\{1+(1-\mu)+\cdots+(1-\mu)^{l-1}\}+(1-\mu)^l O_0$$
$$\leqq 2\varepsilon_n+(1-\mu)^l O_0$$

故ニ $(1-\mu)^{n_0} O_0<\frac{\varepsilon}{3}$ ニ n_0 ヲ取ルト $n\geqq n_0$ デ

$O_n\leqq\varepsilon$ トナル。即チ $O_n\longrightarrow 0$.

之レカラ直チニ

$$\underset{t}{M} f(t)=\underset{t}{M} f(at).\quad M(\alpha f(t))=\alpha M(f(t)).$$

又 $\rho'(x, y)=\overline{\underset{a,b}{fin}}\,|f(axb)-f(ayb)|+\overline{\underset{a,b}{fin}}\,|g(axb)-g(ayb)|$

ヲ用ヒテ、二ツノ a. p. f. $f(x)$ $g(x)$ ニ對シテ

$$M(f(t)+g(t))=Mf(t)+Mg(t)$$

トナル。

又 $\left| \underset{t}{M} f(t) - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i f(ta_i) \right| < \varepsilon$ ナル $\alpha_i > 0$ $\sum_{1}^{N} \alpha_i = 1$

ナル α_i, $a_i \in G$ ノ存在ハ

$f^{(n)}(x)$ ハ定義カラ

$$\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i f(tb_i), \quad \beta_i > 0 \quad \sum_{1}^{\infty} \beta_i = 1$$

ナル形トナルカラ

先ヅ $\left| Mf - f^{(n)}(t) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ ニ n ヲ取リ $\beta_0 = \sum_{N}^{\infty} \beta_i < \frac{\varepsilon}{2\theta_0}$

ニ N ヲ取レバ; $b_0 = 1$ トシテ

$$\left| Mf - \sum_{i=0}^{N-1} \beta_i f(\overset{x}{b_i}) \right| \leqq \left| Mf - f^{(n)}(t) \right|$$

$$+ \left| f(t) - \sum_{0}^{N-1} \beta_i f(\overset{x}{b_i}) \right| < \varepsilon$$

ヲ満足スル。

同様ニ $P'(x, E) = P(Ex^{-1})$ ナル Markoff Process ヲ考ヘテ right invariant ナ mean ガ得ラレ、其レ等ガ一致シテ unique ナルコトハ J. v. Neumann ノ Compositio Math. Vol. I ノ論法カラ直チニ分リマス。』